*AGU International Journal of Sciences – 2023, Vol. 32 (1), 105 – 114*

Tạp chí Khoa học Quốc tế AGU
ISSN 0866 - 8086

# DÃY LẶP ĐẾN ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG CỦA ÁNH XẠ LIPSCHITZ, GIẢ CO MẠNH VÀ ÁNH XẠ $(\alpha,\beta)$ - KHÔNG GIÃN TRONG KHÔNG GIAN $L_p$

Nguyễn Trung Hiếu[1]

[1]*Trường Đại học Đồng Tháp*

***Thông tin chung:***
*Ngày nhận bài: 22/03/2021*
*Ngày nhận kết quả bình duyệt: 28/09/2021*
*Ngày chấp nhận đăng: 12/2023*

***Title:***
*Some iterations for common fixed points*

*of lipschitzian strictly pseudo-contractive*

*and $(\alpha,\beta)$ - nonexpansive mappings in $L_p$ spaces*

***Keywords:***
*$(\alpha,\beta)$ -nonexpansive mapping; Lipschitzian strictly pseudo-contractive mapping; common fixed point; $L_p$ space*

***Từ khóa:***
*Ánh xạ $(\alpha,\beta)$ -không giãn; ánh xạ Lipschitz, giả co mạnh; điểm bất động chung; không gian $L_p$*

**ABSTRACT**

*The purpose of this study is to prove some convergence results of the Ishikawa-type iteration and the Noor-type iteration to common fixed points of $(\alpha,\beta)$ -nonexpansive mappings and a Lipschitzian strictly pseudo-contractive mappings in $L_p$ spaces. In addition, we apply the obtained result to study the convergence of the Ishikawa-type iteration to solutions to a system of nonlinear integral equations.*

**TÓM TẮT**

*Mục đích của nghiên cứu này là chứng minh một số kết quả về sự hội tụ của dãy lặp kiểu Ishikawa và dãy lặp kiểu Noor đến điểm bất động chung của ánh xạ $(\alpha,\beta)$ - không giãn và ánh xạ Lipschitz, giả co mạnh trong không gian $L_p$. Đồng thời, chúng tôi áp dụng kết quả đạt được để nghiên cứu sự hội tụ của dãy lặp kiểu Ishikawa đến nghiệm của hệ phương trình tích phân phi tuyến.*

## 1. GIỚI THIỆU

Trong lí thuyết điểm bất động, vấn đề nghiên cứu sự hội tụ của những dãy lặp đến điểm bất động và điểm bất động chung của ánh xạ không giãn được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Bên cạnh đó, ánh xạ không giãn được nhiều tác giả quan tâm mở rộng theo những cách tiếp cận khác nhau. Một trong những các tiếp cận cơ bản là xây dựng một bất đẳng thức tổng quát hơn bất đẳng thức trong định nghĩa ánh xạ không giãn để giới thiệu lớp ánh xạ không giãn suy rộng. Với cách tiếp cận này, nhiều lớp ánh xạ không giãn suy rộng đã được giới thiệu như ánh xạ giả co mạnh, ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(C)$, ánh xạ $\alpha$ -không giãn, ... Từ đó, nhiều kết quả về sự hội tụ của dãy lặp đến điểm bất động và điểm bất động chung của những lớp ánh xạ này đã được thiết lập. Cũng với cách tiếp cận trên, năm 2018, Amini-Harandi và cs. (Amini-Harandi, Fakhar & Hajisharifi, 2018) đã giới thiệu khái niệm ánh xạ $(\alpha,\beta)$ -không giãn, một mở rộng của ánh xạ không giãn và ánh xạ $\alpha$ -không giãn, đồng thời các tác giả cũng thiết lập điều kiện đủ để ánh xạ $(\alpha, \beta)$ -không giãn có dãy xấp xỉ điểm bất động. Gần đây, các tác giả trong bài báo (Huỳnh Thị Bé Trang & Nguyễn Trung Hiếu, 2020) đã thiết lập được sự hội tụ của dãy lặp Mann đến điểm bất động của ánh xạ $(\alpha, \beta)$ -không giãn trong không gian $L_p$. Cho đến nay, việc nghiên cứu sự hội tụ đến điểm bất động chung của ánh xạ $(\alpha, \beta)$ -không giãn bởi những dãy lặp cụ thể chưa được thiết lập. Do đó, trong bài báo này, chúng tôi xây dựng dãy lặp kiểu Ishikawa cho hai ánh xạ và dãy lặp kiểu Noor cho ba ánh xạ, từ đó chúng tôi chứng minh sự hội tụ của dãy lặp này đến điểm bất động chung ánh xạ $(\alpha, \beta)$ -không giãn và ánh xạ Lipschitz, giả co mạnh trong không gian $L_p$. Đồng thời, chúng tôi áp dụng kết quả đạt được để nghiên cứu sự hội tụ của dãy lặp kiểu Ishikawa đến nghiệm của hệ phương trình tích phân phi tuyến.

Mục này trình bày một số khái niệm và kết quả cơ bản được sử dụng trong bài viết. Những khái niệm và kết quả này được trích từ các tài liệu tham khảo (Amini-Harandi, Fakhar & Hajisharifi, 2018; Chidume, 1987; Huỳnh Thị Bé Trang & Nguyễn Trung Hiếu, 2020).

**Định nghĩa 1.1** (Amini-Harandi (2018), Definition 2.2; Chidume (1987), p.283)**.** Cho $(X, ||.||)$ là không gian định chuẩn, $C$ là tập con khác rỗng của $X$ và $T: C \to C$là ánh xạ. Khi đó,

(1) $T$ được gọi là *ánh xạ* $(\alpha, \beta)$ *-không giãn* nếu tồn tại $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sao cho với mọi $u, v \in C$, ta có

$$||Tu - Tv||^2 \le \alpha||Tu - v||^2 + \alpha||Tv - u||^2 + \beta||Tu - u||^2 + \beta||Tv - v||^2$$
$$+(1 - 2\alpha - 2\beta)||u - v||^2.$$

(2) $T$ được gọi là *ánh xạ Lipschitz* với hằng số $L \ge 0$ nếu $||Tu - Tv|| \le L||u - v||$ với mọi $u, v \in C$.

(3) $T$ được gọi là ánh xạ giả co mạnh nếu tồn tại $t > 1$ sao cho với mọi $r > 0$ và mọi $u, v \in C$, ta có

$$||u - v|| \le ||(1 + r)(u - v) - rt(Tu - Tv)||.$$

Kí hiệu $F(T) = \{p \in C: Tp = p\}$ là tập hợp điểm bất động của ánh xạ $T: C \to C$, $I_1 = \{(\alpha, \beta): \alpha < 1, \beta \le 0\}$ và $I_2 = \{(\alpha, \beta): \alpha + 2\beta < 1, \beta > 0\}$. Trong (Huỳnh Thị Bé Trang & Nguyễn Trung Hiếu, 2020), các tác giả đã chứng minh rằng với $(\alpha, \beta) \in I_1$ hoặc $(\alpha, \beta) \in I_2$, ánh xạ $(\alpha, \beta)$ -không giãn là ánh xạ tựa Lipschitz, tức là $||Tu - p|| \le L||u - p||$ với $u \in C$ và $p \in F(T)$. Kết quả này thể hiện qua mệnh đề sau.

**Mệnh đề 1.2 (**Trang & Hiếu (2020), Mệnh đề 2.1 )**.** *Cho* $(X, ||.||)$ *là một không gian định chuẩn,* $C$ *là một tập con khác rỗng của* $X$, $T: C \to C$ *là ánh xạ* $(\alpha, \beta)$ *-không giãn. Khi đó,*

*(1) Nếu* $(\alpha, \beta) \in I_1$ *thì với* $u \in C$ *và* $p \in F(T)$*, ta có*

$$||Tu - p||^2 \le \frac{1-\alpha-2\beta}{1-\alpha}||u - p||^2. \qquad (1.1)$$

*(2) Nếu* $(\alpha, \beta) \in I_2$ *thì với* $u \in C$ *và* $p \in F(T)$*, ta có*

$$||Tu - p||^2 \le \frac{1-\alpha}{1-\alpha-2\beta}||u - p||^2. \qquad (1.2)$$

**Nhận xét 1.3 (** Huỳnh Thị Bé Trang & Nguyễn Trung Hiếu (2020), Nhận xét 2.2 **).** Đặt $d^2 = \max\left\{\frac{1- a - 2b}{1- a}, \frac{1- a}{1- a - 2b}\right\}$. Khi đó, với $(\alpha, \beta) \in I_1$ hoặc $(\alpha, \beta) \in I_2$, bất đẳng thức (1.1) và (1.2) được viết về dạng sau với $u \in C$ và $p \in F(T)$,

$$||Tu - p|| \le \delta||u - p||. \qquad (1.3)$$

Cho $(X, ||.||)$ là không gian Banach thực và $X^*$ là không gian liên hợp của $X$, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc $J: X \to 2^{X^*}$ được xác định bởi

$$J(u) = \{u^* \in X^*: ||u||^2 = ||u^*||^2 = \langle u, u^* \rangle\}.$$

Với $p \geq 2$, ta kí hiệu $\Omega$ là tập con đo được Lebesgue trong $\mathbb{R}^n$, $E = L_p(\Omega)$ là không gian các hàm thực $f$ đo được trên $\Omega$ sao cho $|f|^p$ khả tích Lebesgue trên $\Omega$. Trong $L_p(\Omega)$, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc là ánh xạ đơn trị và được kí hiệu bởi $j$ (xem (Chidume, 1987)). Hơn nữa, ta có hai kết quả sau.

**Bổ đề 1.4** (Chidume (1987), Bổ đề 1.2 **).** *Xét không gian $E = L_p(\Omega)$. Khi đó, với $u, v \in E$, ta có*

$$||u + v||^2 \leq (p-1)||u||^2 + ||v||^2 + 2\langle u, j(v)\rangle. \tag{1.4}$$

**Bổ đề 1.5** (Chidume (1987), Bổ đề 1.3)**.** *Xét không gian $E = L_p(\Omega)$, $C$ là tập con khác rỗng của $E$, $T: C \to C$ là ánh xạ giả co mạnh với hệ số $t > 1$ và $I$ là ánh xạ đồng nhất. Khi đó, với $u, v \in E$, ta có*

$$\langle (I-T)u - (I-T)v, j(u-v)\rangle \geq \frac{t-1}{t}||u-v||^2. \tag{1.5}$$

## 2. NỘI DUNG

Trước hết, lấy ý tưởng từ dãy lặp Ishikawa (Ishikawa, 1974), chúng tôi giới thiệu dãy lặp hai bước kiểu Ishikawa cho hai ánh xạ và chứng minh sự hội tụ của dãy lặp này đến điểm bất động chung của ánh xạ $(\alpha, \beta)$ -không giãn với $(\alpha, \beta) \in I_1$ hoặc $(\alpha, \beta) \in I_2$ và ánh xạ Lipschitz giả co mạnh trong không gian $L_p$.

**Định lí 2.1.** *Giả sử*

*(1) Cho $C$ là tập con lồi và khác rỗng của $E$.*

*(2) $T_1: C \to C$ là ánh xạ Lipschitz với hằng số Lipschitz $L \geq 1$ và $T_1$ là ánh xạ giả co mạnh với hệ số t.*

*(3) $T_2: C \to C$ là ánh xạ $(\alpha, \beta)$ -không giãn với $(\alpha, \beta) \in I_1$ hoặc $(\alpha, \beta) \in I_2$.*

*(4) $F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$.*

*(5) Xét dãy $\{u_n\}$ xác định bởi: $u_1 \in C$ và*

$$\begin{cases} v_n = (1-b_n)u_n + b_n T_2 u_n \\ u_{n+1} = (1-a_n)u_n + a_n T_1 v_n, \end{cases} \tag{2.1}$$

*trong đó $\{a_n\}, \{b_n\} \subset [0,1]$ và thỏa mãn*

$$0 \leq b_n \leq a_n \leq \lambda[(p-1)L^2\delta^2 + 2L(1+\delta) + 2\lambda - 1]^{-1}$$

*với $\lambda = \frac{t-1}{t} \in (0,1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ và hằng số $\delta$ xác định bởi (1.3). Khi đó, dãy $\{u_n\}$ hội tụ đến điểm bất động chung của $T_1$ và $T_2$.*

**Chứng minh.** Giả sử $u$ là điểm bất động chung của $T_1$ và $T_2$. Khi đó, $T_1 u = T_2 u = u$.
Do đó, sử dụng bất đẳng thức (1.4) và $T_1$ là ánh xạ Lipschitz với hệ số $L$, ta được

$$\begin{aligned} ||u_{n+1} - u||^2 &= ||(1-a_n)u_n + a_n T_1 v_n - u||^2 \\ &= ||a_n(T_1 v_n - u) + (1-a_n)(u_n - u)||^2 \\ &\leq (p-1)a_n^2||T_1 v_n - u||^2 + (1-a_n)^2||u_n - u||^2 \\ &\quad + 2a_n(1-a_n)\langle T_1 v_n - u, j(u_n - u)\rangle \\ &\leq (p-1)L^2 a_n^2||v_n - u||^2 + (1-a_n)^2||u_n - u||^2 \end{aligned}$$

$$+2a_n(1-a_n)\langle T_1 v_n - u, j(u_n-u)\rangle.$$

(2.2)

Hơn nữa, vì $T_2$ là ánh xạ $(\alpha,\beta)$ -không giãn nên sử dụng (1.3) ta được

$$\begin{aligned}||v_n-u|| &= ||(1-b_n)u_n + b_nT_2u_n - u||\\ &= ||(1-b_n)(u_n-u) + b_n(T_2u_n-u)||\\ &\le (1-b_n)||u_n-u|| + b_n||T_2u_n-u||\\ &\le (1-b_n)||u_n-u|| + b_n\delta||u_n-u||\\ &= [1+b_n(\delta-1)]||u_n-u||\\ &\le \delta||u_n-u||. \qquad (2.3)\end{aligned}$$

Ta lại có

$$\langle T_1v_n - u, j(u_n-u)\rangle = \langle T_1v_n - T_1u_n, j(u_n-u)\rangle + \langle T_1u_n - u, j(u_n-u)\rangle \qquad (2.4)$$

Vì $j$ là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc nên $||j(u_n-u)|| = ||u_n-u||$. Hơn nữa, theo bất đẳng thức (1.4), ta suy ra số hạng $\langle u, j(v)\rangle$ là số thực với mọi $u, v \in E$. Do đó $\langle T_1v_n - T_1u_n, j(u_n-u)\rangle$ là số thực. Khi đó, vì $j(u_n-u) \in E^*$ nên

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{T_1v_n - T_1u_n, j(u_n-u)}\rangle &\le |\langle \boldsymbol{T_1v_n - T_1u_n, j(u_n-u)}\rangle|\\ &\le ||\boldsymbol{T_1v_n - T_1u_n}||.||\boldsymbol{j(u_n-u)}||\\ &= ||T_1v_n - T_1u_n||.||u_n-u||\\ &\le \boldsymbol{L||v_n-u_n||.||u_n-u||}\\ &= \boldsymbol{L||(1-b_n)u_n + b_nT_2u_n - u_n||.||u_n-u||}\\ &= \boldsymbol{L||b_n(T_2u_n-u_n)||.||u_n-u||}\\ &= \boldsymbol{Lb_n||T_2u_n-u_n||.||u_n-u||}\\ &\le \boldsymbol{Lb_n(||T_2u_n-u|| + ||u_n-u||)||u_n-u||}\\ &\le Lb_n(\delta||u_n-u|| + ||u_n-u||)||u_n-u||\\ &= \boldsymbol{L(1+\delta)b_n||u_n-u||^2}. \qquad (2.5)\end{aligned}$$

Hơn nữa, sử dụng bất đẳng thức (1.5), ta được

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{T_1u_n - u, j(u_n-u)}\rangle &= \langle \boldsymbol{u_n-u, j(u_n-u)}\rangle + \langle \boldsymbol{T_1u_n - u_n, j(u_n-u)}\rangle\\ &= \boldsymbol{||u_n-u||^2 - \langle u_n - T_1u_n, j(u_n-u)\rangle}\\ &= \boldsymbol{||u_n-u||^2 - \langle (I-T_1)u_n - (I-T_1)u, j(u_n-u)\rangle}\\ &\le \boldsymbol{||u_n-u||^2 - \lambda||u_n-u||^2}\\ &= \boldsymbol{(1-\lambda)||u_n-u||^2}. \qquad (2.6)\end{aligned}$$

Khi đó, từ (2.4), (2.5) và (2.6), ta được

$$\begin{aligned}\langle T_1v_n - u, j(u_n-u)\rangle &\le L(1+\delta)b_n||u_n-u||^2 + (1-\lambda)||u_n-u||^2\\ &= [L(1+\delta)b_n + (1-\lambda)]||u_n-u||^2 \qquad (2.7)\end{aligned}$$

Do đó, từ (2.2), (2.3) và (2.7), ta có

$$\begin{aligned}||u_{n+1}-u||^2 &\le (1-a_n)^2||u_n-u||^2+(p-1)L^2\delta^2a_n^2||u_n-u||^2\\ &+2a_n(1-a_n)[L(1+\delta)b_n+(1-\lambda)]||u_n-u||^2\\ &=[(1-a_n)^2+(p-1)L^2\delta^2a_n^2+2L(1+\delta)a_n(1-a_n)b_n\\ &+2(1-\lambda)a_n(1-a_n)]||u_n-u||^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Vì $1-a_n<1$ và $b_n\le a_n$ nên $(1-a_n)a_nb_n\le a_n^2$. Do đó, từ (2.8) ta có

$$\begin{aligned}||u_{n+1}-u||^2 &\le [(1-2a_n+a_n^2)+(p-1)L^2\delta^2a_n^2+2L(1+\delta)a_n^2\\ &+2a_n-2a_n^2-2a_n\delta+2a_n^2\delta]||u_n-u||^2\\ &=\boldsymbol{1-2a_n\lambda+a_n^2[(p-1)L^2\delta^2+2L(1+\delta)+2\lambda-1]||u_n-u||^2}\\ &\le (\boldsymbol{1-2a_n\lambda+a_n\lambda})||\boldsymbol{u_n-u}||^{\boldsymbol{2}}\\ &=(\boldsymbol{1-a_n\lambda})||\boldsymbol{u_n-u}||^{\boldsymbol{2}}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Sử dụng bất đẳng thức $1-t\le e^{-t}$ với mọi $t\ge 0$, từ (2.9) ta được

$$||u_{n+1}-u||^2\le e^{-a_n\lambda}||u_n-u||^2. \tag{2.10}$$

Khi đó, trong (2.10) cho $n$ nhận các giá trị $k,k-1,\dots,1$, ta được

$$\begin{aligned}||u_{k+1}-u||^2 &\le e^{(-a_k\lambda)}||u_k-u||^2\\ &\le e^{(-a_k\lambda)}.e^{(-a_{k-1}\lambda)}||u_{k-1}-u||^2\\ &\dots\\ &\le e^{(-\lambda\sum_{n=1}^k a_n)}||u_1-u||^2. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Cho $k\to\infty$ trong (2.11) và sử dụng giả thiết $\sum_{n=1}^\infty a_n=\infty$, ta suy ra dãy $\{u_n\}$ hội tụ đến $u$. □

Tiếp theo, lấy ý tưởng từ dãy lặp Noor (Noor, 2000), chúng tôi giới thiệu dãy lặp ba bước kiểu Noor cho ba ánh xạ và chứng minh sự hội tụ của dãy lặp này đến điểm bất động chung của hai ánh xạ $(\alpha,\beta)$ -không giãn với $(\alpha,\beta)\in I_1$ hoặc $(\alpha,\beta)\in I_2$ và một ánh xạ Lipschitz giả co mạnh trong không gian $E=L_p$.

**Định lí 2.2.** *Giả sử*

*(1) Cho $C$ là tập con lồi và khác rỗng của $E$.*

*(2) $T_1: C\to C$ là ánh xạ Lipschitz với hằng số Lipschitz $L\ge 1$ và $T_1$ là ánh xạ giả co mạnh với hệ số t.*

*(3) $T_2,T_3: C\to C$ là ánh xạ $(\alpha,\beta)$ -không giãn với $(\alpha,\beta)\in I_1$ hoặc $(\alpha,\beta)\in I_2$.*

*(4) $F(T_1)\cap F(T_2)\cap F(T_3)\ne\emptyset$.*

*(5) Xét dãy $\{u_n\}$ xác định bởi: $u_1\in C$ và*

$$\begin{cases} w_n=(1-c_n)u_n+c_nT_3u_n\\ v_n=(1-b_n)u_n+b_nT_2w_n\\ u_{n+1}=(1-a_n)u_n+a_nT_1v_n, \end{cases}$$

*trong đó $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}\subset[0,1]$ sao cho*

$$0\le b_n\le a_n\le\lambda[(p-1)L^2\delta^4+2L(1+\delta^2)+2\lambda-1]^{-1}$$

*với $\lambda=\frac{t-1}{t}\in(0,1),\sum_{n=1}^\infty a_n=\infty$ và hằng số $\delta$ xác định bởi (1.3). Khi đó, dãy $\{u_n\}$ hội tụ đến điểm bất động chung của $T_1,T_2$ và $T_3$.*

**Chứng minh.** Giả sử $u$ là điểm bất động chung của $T_1, T_2$ và $T_3$. Khi đó, $T_1u = T_2u = T_3u = u$. Do đó, sử dụng bất đẳng thức (1.4) và $T_1$ là ánh xạ Lipschitz với hệ số $L$, ta được

$$\begin{aligned}
||u_{n+1} - u||^2 &= ||(1-a_n)u_n + a_nT_1v_n - u||^2 \\
&= ||a_n(T_1v_n - u) + (1-a_n)(u_n - u)||^2 \\
&\leq (p-1)a_n^2||T_1v_n - u||^2 + (1-a_n)^2||u_n - u||^2 \\
&\quad +2a_n(1-a_n)\langle T_1v_n - u, j(u_n - u)\rangle \\
&\leq (p-1)L^2a_n^2||v_n - u||^2 + (1-a_n)^2||u_n - u||^2 \\
&\quad +2a_n(1-a_n)\langle T_1v_n - u, j(u_n - u)\rangle. \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Hơn nữa, vì $T_2$ là ánh xạ $(\alpha, \beta)$ -không giãn nên sử dụng (1.3) ta được

$$\begin{aligned}
||v_n - u|| &= ||(1-b_n)u_n + b_nT_2w_n - u|| \\
&= ||(1-b_n)(u_n - u) + b_n(T_2w_n - u)|| \\
&\leq (1-b_n)||u_n - u|| + b_n||T_2w_n - u|| \\
&\leq (1-b_n)||u_n - u|| + b_n\delta||w_n - u|| \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
||w_n - u|| &= ||(1-c_n)u_n + c_nT_3u_n - u|| \\
&= ||(1-c_n)(u_n - u) + c_n(T_3u_n - u)|| \\
&\leq (1-c_n)||u_n - u|| + c_n||T_3u_n - u|| \\
&\leq (1-c_n)||u_n - u|| + c_n\delta||u_n - u|| \\
&= [1 + c_n(\delta - 1)]||u_n - u|| \\
&\leq \delta||u_n - u||. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Kết hợp (2.13) và (2.14), ta được

$$\begin{aligned}
||v_n - u|| &\leq (1-b_n)||u_n - u|| + b_n\delta^2||u_n - u|| \\
&= [1 + b_n(\delta^2 - 1)]||u_n - u|| \\
&\leq \delta^2||u_n - u||. \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Ta lại có

$$\langle T_1v_n - u, j(u_n - u)\rangle = \langle T_1v_n - T_1u_n, j(u_n - u)\rangle + \langle T_1u_n - u, j(u_n - u)\rangle. \qquad (2.16)$$

Lập luận tương tự như chứng minh (2.5), ta có

$$\begin{aligned}
\langle T_1v_n - T_1u_n, j(u_n - u)\rangle &\leq ||T_1v_n - T_1u_n||.||u_n - u|| \\
&\leq L||v_n - u_n||.||u_n - u|| \\
&= L||(1-b_n)u_n + b_nT_2w_n - u_n||.||u_n - u|| \\
&= L||b_n(T_2w_n - u_n)||.||u_n - u|| \\
&= Lb_n||T_2w_n - u_n||.||u_n - u|| \\
&\leq Lb_n(||T_2w_n - u|| + ||u_n - u||)||u_n - u|| \\
&\leq Lb_n(\delta||w_n - u|| + ||u_n - u||)||u_n - u||. \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

Khi đó, từ (2.14) và (2.17), ta được

$$\langle T_1 v_n - T_1 u_n, j(u_n - u)\rangle = Lb_n(\delta^2 ||u_n - u|| + ||u_n - u||)||u_n - u||$$
$$= L(1+\delta^2)b_n||u_n - u||^2. \quad (2.18)$$

Hơn nữa, sử dụng bất đẳng thức (1.5), ta được

$$\langle T_1 u_n - u, j(u_n - u)\rangle = \langle u_n - u, j(u_n - u)\rangle + \langle T_1 u_n - u_n, j(u_n - u)\rangle$$
$$= ||u_n - u||^2 - \langle u_n - T_1 u_n, j(u_n - u)\rangle$$
$$= ||u_n - u||^2 - \langle (I - T_1)u_n - (I - T_1)u, j(u_n - u)\rangle$$
$$\leq ||u_n - u||^2 - \lambda ||u_n - u||^2$$
$$= (1-\lambda)||u_n - u||^2. \quad (2.19)$$

Khi đó, từ (2.16), (2.18) và (2.19), ta được

$$\langle T_1 v_n - u, j(u_n - u)\rangle \leq L(1+\delta^2)b_n||u_n - u||^2 + (1-\lambda)||u_n - u||^2$$
$$= [L(1+\delta^2)b_n + (1-\lambda)]||u_n - u||^2. \quad (2.20)$$

Do đó, từ (2.12), (2.15) và (2.20), ta được

$$||u_{n+1} - u||^2 \leq (1-a_n)^2||u_n - u||^2 + (p-1)L^2\delta^4 a_n^2||u_n - u||^2$$
$$+2a_n(1-a_n)[L(1+\delta^2)b_n + (1-\lambda)]||u_n - u||^2$$
$$= [(1-a_n)^2 + (p-1)L^2\delta^4 a_n^2 + 2L(1+\delta^2)(1-a_n)a_n b_n$$
$$+2(1-\lambda)a_n(1-a_n)]||u_n - u||^2. \quad (2.21)$$

Vì $1 - a_n < 1$ và $b_n \leq a_n$ nên $(1-a_n)a_n b_n \leq a_n^2$. Do đó, từ (2.21) ta có

$$||u_{n+1} - u||^2 \leq [(1-a_n)^2 + (p-1)L^2\delta^4 a_n^2 + 2L(1+\delta^2)a_n^2$$
$$+2(1-\lambda)(1-a_n)a_n]||u_n - u||^2$$
$$= 1 - 2a_n\lambda + a_n^2[(p-1)L^2\delta^4 + 2L(1+\delta^2) + 2\lambda - 1]||u_n - u||^2$$
$$\leq (1 - 2a_n\lambda + a_n\lambda)||u_n - u||^2$$
$$= (1 - a_n\lambda)||u_n - u||^2.$$

Điều này dẫn đến $||u_{n+1} - u||^2 \leq e^{-a_n\lambda}||u_n - u||^2$. Lập luận tương tự như trong chứng minh Định lí 2.1, ta kết luận được dãy $\{u_n\}$ hội tụ đến $u$. □

Tiếp theo, chúng tôi áp dụng Định lí 2.1 để nghiên cứu sự hội tụ của dãy lặp kiểu Ishikawa đến nghiệm của hệ phương trình tích phân phi tuyến.

**Ví dụ 2.3.** Kí hiệu $E = L_2([0,1])$ là không gian Banach với chuẩn $||u|| = \sqrt{\int_0^1 |u(x)|^2 dx}$ với $u \in E$. Xét hệ phương trình tích phân phi tuyến sau:

$$\begin{cases} u(x) = f(x) + \int_0^1 K_1(x,s,u(s))ds \\ u(x) = g(x) + \int_0^1 K_2(x,s,u(s))ds \end{cases} \quad (2.22)$$

trong đó, $f, g \in E$ và $K_1, K_2: [0,1]\times[0,1]\times E \to E$ là các hàm cho trước. Đặt $C = \{u \in E: u(x) \geq 0,\ \forall\, x \in [0,1]\}$. Khi đó, $C$ là tập lồi và khác rỗng của $E$. Với $u \in C$ và $x \in [0,1]$, đặt

$$T_1u(x) = f(x) + \int_0^1 K_1\,(x, s, u(s))ds,$$

$$T_2u(x) = g(x) + \int_0^1 K_2\,(x, s, u(s))ds.$$

Giả sử các giả thiết sau được thỏa mãn:

$(H1)$. Với mọi $x, s \in [0,1]$ ta có $f(x), g(x), K_1(x, s, u(s)), K_2(x, s, u(s)) \geq 0$.

$(H2)$. Tồn tại $t > 1$ sao cho với mọi $u, v \in C$ và $s, x \in [0,1]$, ta có

$$|K_1(x, s, u(s)) - K_1(x, s, v(s))| \leq \frac{1}{t}|u(s) - v(s)|.$$

$(H3)$. Tồn tại $(\alpha, \beta) \in I_1$ hoặc $(\alpha, \beta) \in I_2$ sao cho với mọi $u, v \in C$ và $s, x \in [0,1]$, ta có

$$|K_2(x, s, u(s)) - K_2(x, s, v(s))|^2 \leq \alpha|T_2u(s) - v(s)|^2 + \alpha|T_2v(s) - u(s)|^2$$
$$+\beta|T_2u(s) - u(s)|^2 + \beta|T_2v(s) - v(s)|^2$$
$$+(1 - 2\alpha - 2\beta)|u(s) - v(s)|^2.$$

Xét dãy $\{u_n\}$ xác định bởi (2.1), trong đó $0 \leq b_n \leq a_n \leq \lambda[(\delta + 1)^2 + 2\lambda]^{-1}$ với $\lambda = \frac{t-1}{t} \in (0,1), \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ và hằng số $\delta$ xác định bởi (1.3).

Khi đó, nếu hệ phương trình tích phân (2.22) có nghiệm $u \in C$ thì dãy $\{u_n\}$ hội tụ đến $u$.

**Chứng minh**. Xét hai ánh xạ $T_1, T_2: C \to C$ xác định bởi:

$$T_1u(x) = f(x) + \int_0^1 K_1\,(x, s, u(s))ds,$$

$$T_2u(x) = g(x) + \int_0^1 K_2\,(x, s, u(s))ds$$

với $u \in C$ và $x \in [0,1]$. Khi đó, từ giả thiết$(H1)$, ta có $T_1u(x), T_2u(x) \geq 0$ với mọi $u \in C$ và $x \in [0,1]$. Do đó, $T_1u, T_2u \in C$ với mọi $u \in C$ hay $T_1$ và $T_2$ xác định. Lưu ý rằng $u \in C$ là nghiệm của hệ phương trình tích phân (2.22) khi và chỉ khi $u$ là điểm bất động chung của ánh xạ $T_1$ và $T_2$. Do đó, việc chứng minh dãy $\{u_n\}$ hội tụ đến nghiệm $u$của hệ phương trình tích phân (2.22) tương đương với việc chứng minh dãy $\{u_n\}$ hội tụ đến $u$ là điểm bất động chung của $T_1$ và $T_2$. Ta sẽ chứng minh các giả thiết của Định lí 2.1 được thỏa mãn. Thật vậy,

(1). Với $u, v \in C$ và $s, x \in [0,1]$, sử dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$|T_1u(x) - T_1v(x)| \leq \int_0^1 |K_1(x, s, u(s)) - K_1(x, s, v(s))|\,ds$$
$$\leq \sqrt{\int_0^1 d\,s} \times \sqrt{\int_0^1 |\,K_1(x, s, u(s)) - K_1(x, s, v(s))|^2 ds}$$
$$= \sqrt{\int_0^1 |\,K_1(x, s, u(s)) - K_1(x, s, v(s))|^2 ds}. \qquad (2.23)$$

Khi đó, từ giả thiết $(H2)$ và (2.23), ta được

$$|T_1u(x) - T_1v(x)|^2 \leq \frac{1}{t^2}\int_0^1 |\,u(s) - v(s)|^2 ds$$
$$= \frac{1}{t^2}||u - v||^2.$$

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned}||T_1u - T_1v||^2 &= \int_0^1 |T_1u(x) - T_1v(x)|^2 dx \\ &\le \frac{1}{t^2}\int_0^1 ||u-v||^2\, dx \\ &= \frac{1}{t^2}||u-v||^2 \\ &\le ||u-v||^2. \qquad (2.24)\end{aligned}$$

Khi đó, từ (2.24), ta suy ra $||T_1u - T_1v|| \le ||u-v||$ hay $T_1$ là ánh xạ Lipschitz với $L = 1$. Hơn nữa, từ (2.24), ta cũng có $t||T_1u - T_1v|| \le ||u-v||$. Do đó, với $r > 0$ bất kì, ta có $rt||T_1u - T_1v|| \le r||u - v||$. Suy ra

$$\begin{aligned}||u-v|| &\le (1+r)||u-v|| - rt||T_1u - T_1v|| \\ &\le ||(1+r)(u-v) - rt(T_1u - T_1v)||.\end{aligned}$$

Do đó, $T_1$ là ánh xạ giả co mạnh với hệ số $t$.

(2). Với $u, v \in C$ và $x \in [0,1]$, tương tự (2.23) ta có

$$\begin{aligned}|T_2u(x) - T_2v(x)|^2 &\le \int_0^1 |K_2(x,s,u(s)) - K_2(x,s,v(s))|^2 ds \\ &\le \int_0^1 [\alpha|T_2u(s) - v(s)|^2 + \alpha|T_2v(s) - u(s)|^2 \\ &\quad + \beta|T_2u(s) - u(s)|^2 + \beta|T_2v(s) - v(s)|^2 \\ &\quad + (1-2\alpha-2\beta)|u(s) - v(s)|^2] ds \\ &= \alpha||T_2u - v||^2 + \alpha||T_2v - u||^2 + \beta||T_2u - u||^2 \\ &\quad + \beta||T_2v - v||^2 + (1-2\alpha-2\beta)||u-v||^2.\end{aligned}$$

Lấy tích phân hai vế theo biến $x$ trên[0,1], ta có

$$\begin{aligned}||T_2u - T_2v||^2 &\le \alpha||T_2u - v||^2 + \alpha||T_2v - u||^2 + \beta||T_2u - u||^2 \\ &\quad + \beta||T_2v - v||^2 + (1-2\alpha-2\beta)||u-v||^2.\end{aligned}$$

Do đó, $T_2$ là ánh xạ $(\alpha, \beta)$ -không giãn.

Như vậy các giả thiết của Định lí 2.1 được thỏa mãn. Do đó, theo Định lí 2.1, ta có dãy dãy $\{u_n\}$ hội tụ đến nghiệm $u \in C$ của hệ phương trình (2.22).

Ví dụ sau minh họa cho sự tồn tại các hàm $f, g, K_1, K_2$ thỏa mãn các giả thiết trong Ví dụ 2.3.

**Ví dụ 2.4.** Kí hiệu $E = L_2([0,1])$ là không gian Banach với chuẩn $||u|| = \sqrt{\int_0^1 |u(x)|^2 dx}$ với $u \in E, C = \{u \in E : u(x) \ge 0$ với mọi $x \in [0,1]\}$. Xét hệ phương trình tích phân phi tuyến sau:

$$\begin{cases} u(x) = \dfrac{15}{16}x^3 + \displaystyle\int_0^1 \frac{(1+s^3)x^3u(s)}{4(1+u(s))}ds \\ u(x) = \left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\cos 1\right)x^3 + \displaystyle\int_0^1 s^2x^3 \sin u(s) ds \end{cases} \qquad (2.25)$$

với $u$ là hàm cần tìm. Với $s, x \in [0,1]$ và $u \in C$, đặt

$$K_1(x,s,u(s)) = \frac{(1+s^3)x^3u(s)}{4(1+u(s))}, f(x) = \frac{15}{16}x^3,$$

$$K_2(x,s,u(s)) = s^2x^3\sin u(s),\ \ g(x) = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cos 1\right)x^3,$$

$$T_1u(x) = \frac{15}{16}x^3 + \int_0^1 \frac{(1+s^3)x^3u(s)}{4(1+u(s))}ds,$$

$$T_2u(x) = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cos 1\right)x^3 + \int_0^1 s^2x^3\sin u(s)ds.$$

Ta sẽ chứng minh các giả thiết trong Ví dụ 2.3 được thỏa mãn.

$(H1)$. Theo cách xác định của $f, g, K_1, K_2$, ta có $f(x), g(x), K_1(x,s,u(s)), K_2(x,s,u(s)) \geq 0$ với mọi $x, s \in [0,1]$.

$(H2)$. Với $u, v \in C$ và $s, x \in [0,1]$, ta có

$$|K_1(x,s,u(s)) - K_1(x,s,v(s))| \leq \frac{(1+s^3)x^3}{4}\left|\frac{u(s)}{1+u(s)} - \frac{v(s)}{1+v(s)}\right| \leq \frac{1}{2}|u(s) - v(s)|.$$

Do đó, giả thiết $(H2)$ thỏa mãn với $t = 2$.

$(H3)$. Với $u, v \in C$ và $s, x \in [0,1]$, ta có

$$|K_2(x,s,u(s)) - K_2(x,s,v(s))|^2 = s^4x^6|\sin u(s) - \sin v(s)|^2 \leq |u(s) - v(s)|^2.$$

Do đó, giả thiết $(H3)$ thỏa mãn với $\alpha = \beta = 0$.

Như vậy, các giả thiết $(H1), (H2)$ và $(H3)$ trong Ví dụ 2.3 được thỏa mãn. Hơn nữa, $u(x) = x^3$ với $x \in [0,1]$ là nghiệm của hệ phương trình tích phân phi tuyến (2.25). Để ý rằng trong giả thiết $(H3)$ của Ví dụ 2.3, ta có $\lambda = \frac{t-1}{t} = \frac{1}{2}$ và $\delta^2 = 1$ và điều kiện của $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ trở thành $0 \leq b_n \leq a_n \leq \frac{1}{10}$. Bằng cách chọn $b_n = \frac{1}{12n+3}, a_n = \frac{1}{10n}$ ta có $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, theo Ví dụ 2.3, dãy $\{u_n\}$ xác định bởi (2.1) hội tụ đến nghiệm $u(x) = x^3$ của hệ phương trình tích phân phi tuyến (2.25).

## 3. KẾT LUẬN

Nghiên cứu này đã thiết lập và chứng minh được hai định lí về sự hội tụ của dãy lặp kiểu Ishikawa và dãy lặp kiểu Noor đến điểm bất động chung của ánh xạ $(\alpha, \beta)$ -không giãn và ánh xạ Lipschitz, giả co mạnh trong không gian $L_p$. Đồng thời, chúng tôi cũng áp dụng kết quả đạt được để nghiên cứu sự hội tụ của dãy lặp đến nghiệm của hệ phương trình tích phân phi tuyến. Các kết quả của nghiên cứu này là sự mở rộng và tổng quát các kết quả của (Huỳnh Thị Bé Trang & Nguyễn Trung Hiếu, 2020).

## TÀI LIỆU THAM KHẢO


Chidume, C. E. (1987). Iterative approximation of fixed points of Lipschitzian strictly pseudo-contractive mappings. *Proc. Am. Math. Soc., 99(2),* 283 – 288.

Harandi, A. A., Fakhar, M. & Hajisharifi, H. R. (2018). *Approximate fixed points of $\alpha$ -nonexpansive mappings*. J. Math. Anal. Appl., 467(2), 1168 – 1173.

Ishikawa, S. (1974). Fixed points by a new iteration method. *Proc. Am. Math. Soc., 44(1),* 147 – 150.

Nguyễn Thị Bé Trang & Nguyễn Trung Hiếu. (2020). Convergence of Mann iteration process to a fixed point of $(\alpha, \beta)$ -nonexpansive mappings in $L_p$spaces. *Dong Thap University Journal of Science, Natural Sciences Issue., 9(5),* 26 – 32.

Noor, M. A. (2000). New approximation schemes for general variational inequalities. *J. Math. Anal. Appl., 251(1),* 217 – 229.