AGU International Journal of Sciences – 2021, Vol. 29 (3), 11 – 19

Tạp chí Khoa học Quốc tế AGU
ISSN 0866 - 8086

TÍNH LIÊN TỤC HÖLDER CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM XẤP XỈ BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU PHỤ THUỘC THAM SỐ

Võ Thành Tài[1], Trần Ngọc Tâm[2]
[1]*Trường Đại học An Giang, ĐHQG-HCM*
[2] *Trường Đại học Cần Thơ*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 25/11/2019
Ngày nhận kết quả bình duyệt: 25/06/2020
Ngày chấp nhận đăng: 12/2021

Title:
On Hölder continuity of approximate solution mappings to parametric optimal control problem

Keywords:
Optimal control problem, Hölder continuity, approximate solution mappings, linear state equation

Từ khóa:
Bài toán điều khiển tối ưu, tính liên tục Hölder, ánh xạ nghiệm xấp xỉ, phương trình trạng thái tuyến tính

ABSTRACT

In this paper, stability conditions of solutions to a parametric optimal control problem with linear state equation are investigated. By using tools of set-valued analysis, sufficient conditions for Hölder continuity of approximate solution mappings to this problem are established.

TÓM TẮT

Bài báo này nghiên cứu sự ổn định nghiệm của bài toán điều khiển tối ưu phụ thuộc tham số với phương trình trạng thái tuyến tính. Sử dụng công cụ của giải tích đa trị, các điều kiện đủ cho tính liên tục Hölder của ánh xạ nghiệm xấp xỉ của bài toán đang xét được thiết lập.

1. GIỚI THIỆU

Lý thuyết điều khiển tối ưu là một mở rộng của phép tính biến phân, tức là bổ sung biến điều khiển cho phương trình trạng thái. Rufus Isaacs (1965) đã thực hiện một sự mở rộng như vậy trong trò chơi đuổi theo hai người trong giai đoạn 1948-1955. Với ý tưởng đó, Richard Bellman (1957) đã áp dụng cho bài toán qui hoạch động. Phát triển từ những bài toán tối ưu hoá cổ điển như bài toán biến phân, bài toán qui hoạch động,… bài toán điều khiển tối ưu là bài toán tìm các quá trình tối ưu cho các hệ điều khiển mô tả bởi các phương trình toán học.

Thời điểm bắt đầu của lý thuyết điều khiển hiện đại là ấn phẩm bằng tiếng Nga năm 1958 (1962 bằng tiếng Anh) với tiêu đề "Lý thuyết toán học của các quá trình tối ưu" của Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze và Mischenko (1962). Các nhà toán học người Mỹ nổi tiếng gắn liền với nguyên lý cực đại bao gồm Valentine, McShane, Hestenes, Berkovitz và Neustadt. Tầm quan trọng của cuốn sách của Pontryagin cùng các cộng sự không chỉ trong một công thức nghiêm ngặt của bài toán phép tính biến phân với các biến điều khiển, mà còn trong chứng minh của nguyên lý cực đại cho các bài toán điều khiển tối ưu. Vì vậy, trong vòng mấy thập niên gần đây, đã có rất nhiều công trình tiêu biểu liên quan đến nguyên lý cực đại cho bài toán điều khiển tối ưu được công bố và ứng dụng.

Cũng như nhiều mô hình toán học khác, các chủ đề chính nghiên cứu về bài toán điều khiển tối ưu bao gồm sự tồn tại nghiệm (Kien, Toan, Wong & Yao, 2012; Zhan, Wei, Li & Xu, 2012; Santos & Silva, 2014), tính ổn định nghiệm (Dontchev, Hager, Malanowski & Veliov, 2000; Malanowski, 2001, 2007, 2008; Kien và cs., 2008, 2012), tính đặt chỉnh (Walczak, 2001).

Trong thời gian gần đây, một trong những bài toán điều khiển tối ưu được quan tâm là bài toán điều khiển tối ưu phụ thuộc tham số với phương trình trạng thái tuyến tính. Bài toán này được nhóm tác giả Kien, B.T., Toan, N.T., Wong, M.M. và Yao, J.C. nghiên cứu vào năm 2012, trong đó sự tồn tại nghiệm và tính nửa liên tục dưới cho ánh xạ nghiệm của bài toán được thiết lập. Năm 2018, nhóm tác giả Lâm Quốc Anh, Nguyễn Phúc Đức, Võ Thành Tài và Trần Ngọc Tâm đã nghiên cứu tính liên tục Hölder của ánh xạ nghiệm bài toán điều khiển tối ưu phụ thuộc tham số này.

Tuy nhiên, đối với các bài toán thực tế thì nghiệm chính xác hầu như rất khó tìm do dữ liệu thu được bằng các thiết bị đo hoặc thống kê nên đã tạo ra những xấp xỉ so với bài toán gốc. Do đó, các nghiệm chính xác của chúng trên thực tế cũng là nghiệm gần đúng. Hơn nữa, trong các phương pháp số, chúng ta luôn phải tìm các nghiệm gần đúng mà chúng hội tụ đến nghiệm chính xác. Một cách tự nhiên, việc nghiên cứu nghiệm xấp xỉ trở thành một vấn đề được nhiều nhà toán học quan tâm và rất có ý nghĩa thực tế. Đã có nhiều công trình nghiên cứu liên quan đến sự ổn định của nghiệm xấp xỉ đối với các bài toán tối ưu (Alexander J.Z., 2013, David G.H. 2003). Tuy nhiên, cho đến nay chưa có công trình nào nghiên cứu về tính liên tục Hölder của nghiệm xấp xỉ bài toán điều khiển tối ưu phụ thuộc tham số với phương trình trạng thái tuyến tính này.

Từ những quan sát trên, bài báo này nghiên cứu tính ổn định nghiệm xấp xỉ của bài toán điều khiển tối ưu phụ thuộc tham số theo nghĩa liên tục Hölder của ánh xạ nghiệm.

Trong bài báo này, ký hiệu $L^p([0,1],\mathbb{R}^n)$ là không gian các hàm khả tích Lebesgue với $1 \leq p < \infty$; $W^{1,1}([0,1],\mathbb{R}^n)$ là không gian Sobolev bao gồm các hàm số liên tục $x:[0,1] \to \mathbb{R}^n$ sao cho $\dot{x} \in L^1([0,1],\mathbb{R}^n)$ với chuẩn

$$\| x \|_{1,1} = |x(0)| + \| \dot{x} \|_1,$$

trong đó $|\cdot|$ là chuẩn của không gian Euclide và $\|\cdot\|_1$ là chuẩn của không gian $L^1([0,1],\mathbb{R}^n)$.

Gọi $X = W^{1,1}([0,1],\mathbb{R}^n), U = L^p([0,1],\mathbb{R}^m), Z = X \times U, M = L^\infty([0,1],\mathbb{R}^k), \Lambda = L^r([0,1],\mathbb{R}^l)$ và $E \subset Z$ là một tập con khác rỗng. Phương trình trạng thái

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + T(t)\lambda(t), t \in [0,1] \text{ hầu khắp nơi (h.k.n)}, \tag{1}$$

với giá trị ban đầu

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

và điều khiển

$$u(t) \in \Omega_1, t \in [0,1] \text{ h.k.n.} \tag{3}$$

Ở đây $\lambda \in \Lambda$ là tham số, $A(t) = \left(a_{ij}(t)\right)_{n\times n}$, $B(t) = \left(b_{ij}(t)\right)_{n\times m}$ và $T(t) = \left(c_{ij}(t)\right)_{n\times l}$ là các ma trận hàm và Ω_1 là tập lồi, đóng, bị chặn của $\mathbb{R}^m$.

Xét ánh xạ đa trị $K: \Lambda \rightrightarrows E$ được xác định bởi

$$K(\lambda) = \{z = (x,u) \in X \times U: (1),(2),(3) \text{ được thoả mãn}\}$$

và $g: E \times M \to \mathbb{R}$ là hàm giá trị thực.

Với $(\lambda,\mu) \in \Lambda \times M$, xét bài toán điều khiển tối ưu phụ thuộc tham số sau đây

$$\text{(OCP): } \min_{z \in K(\lambda)} g(z,\mu).$$

Với $\varepsilon \geq 0$, ta ký hiệu tập nghiệm xấp xỉ của (OCP) tại (λ,μ) là $\tilde{S}(\varepsilon,\lambda,\mu)$, nghĩa là

$$\tilde{S}(\varepsilon,\lambda,\mu) = \{\bar{z} \in K(\lambda): g(\bar{z},\mu) \leq g(y,\mu) + \varepsilon, \forall y \in K(\lambda)\}.$$

Một số ký hiệu và khái niệm cần thiết được sử dụng trong bài báo này bao gồm:

Với A, B là các tập con của X và $a \in X$, ta ký hiệu

$$d(a,B) = \inf_{b \in B} d(a,b),\ H^*(A,B) = \sup_{a \in A} d(a,B),\ H^*(B,A) = \sup_{b \in B} d(b,A)$$

$$H(A,B) = \max\{H^*(A,B), H^*(B,A)\},\ \rho(A,B) = \sup_{a \in A, b \in B} d(a,b).$$

Định nghĩa 2.1 (Lâm Quốc Anh, Phan Quốc Khánh & Trần Ngọc Tâm, 2015) Hàm số $g: Z \to \mathbb{R}$ được gọi là $l.\alpha$-Hölder liên tục tại $\bar{z} \in Z$ nếu tồn tại một lân cận V của $\bar{z}$ sao cho với mọi $z_1, z_2 \in V$ thì

$$|g(z_1) - g(z_2)| \leq l d^\alpha(z_1,z_2).$$

Định nghĩa 2.2 (Lâm Quốc Anh, Phan Quốc Khánh & Trần Ngọc Tâm, 2012) Ánh xạ đa trị $\mathrm{G}: \Lambda \rightrightarrows E$ được gọi là $\gamma.\delta$-Hölder liên tục tại $\bar{\lambda} \in \Lambda$ nếu tồn tại lân cận N của $\bar{\lambda}$ sao cho với mọi $\lambda_1, \lambda_2 \in N$ thì

$$\rho\big(G(\lambda_1), G(\lambda_2)\big) \leq \gamma d^\delta(\lambda_1,\lambda_2), \text{ với } \rho(A,B) := \sup_{a \in A, b \in B} d(a,b).$$

Định nghĩa 2.3 (Lâm Quốc Anh, Phan Quốc Khánh & Trần Ngọc Tâm, 2015) Hàm số $g: Z \to \mathbb{R}$ được gọi là lồi trong tập lồi $A \subset Z$ nếu với mọi $z_1, z_2 \in A$ và $\theta \in [0,1]$,

$$g(\theta z_1 + (1-\theta)z_2) \leq \theta g(z_1) + (1-\theta) g(z_2).$$

Bổ đề 2.1 (Bất đẳng thức Gronwall-Bellman) (Cesari, 1983) Nếu $x(t) \geq 0, y(t) \geq 0, t \in [0,+\infty)$ là các hàm cho trước, trong đó $x(t)$ liên tục, $y(t)$ khả tích Lebesgue trên mọi đoạn hữu hạn và với hằng số C không âm ta có

$$x(t) \leq C + \int_0^t x(s)y(s)ds,\ t \geq 0,$$

thì ta cũng có $x(t) \leq C.\exp(\int_0^t y(s)ds)$.

Phần còn lại của bài báo được cấu trúc như sau: Mục 2 nghiên cứu các điều kiện đủ cho tính liên tục Hölder của ánh xạ nghiệm xấp xỉ bài toán điều khiển tối ưu phụ thuộc tham số. Mục 3 trình bày các kết luận của bài báo.

2. **2**. TÍNH LIÊN TỤC HÖLDER CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM XẤP XỈ

Định lý 2.1. *Xét bài toán (OCP), với mọi $(\lambda_0, \mu_0) \in \Lambda \times M$, giả sử rằng*

i) $A(t), B(t)$ và $T(t)$ bị chặn trên đoạn $[0,1]$;

ii) tồn tại một lân cận N của λ_0 và một lân cận Ω của μ_0 sao cho với mọi $\mu \in \Omega, \lambda \in N$, $z \mapsto g(z,\mu)$ lồi và $q.\delta$-Hölder liên tục trên $K(\lambda)$;

iii) $\mu \mapsto g(z,\mu)$ là $h.\beta$-Hölder liên tục trên Ω với mọi $z \in K(N)$.

Khi đó, với bất kỳ $\bar{\varepsilon}_0 > 0$, ánh xạ nghiệm $\tilde{S}$ liên tục Hölder trên $[\bar{\varepsilon}_0, +\infty) \times N \times \Omega$.

Chứng minh.

Chứng minh được chia thành 5 bước.

Bước 1. Với mọi $\lambda \in \Lambda$, ta chứng minh $K(\lambda)$ là tập khác rỗng, lồi và chỉ ra rằng ánh xạ K liên tục Lipschitz trên Λ.

Thật vậy, theo định lý tồn tại nghiệm (Alekseev, 1987) thì $K(\lambda) \neq \emptyset$ với mọi $\lambda \in \Lambda$.

Mặt khác, dễ thấy $K(\lambda)$ là tập lồi.

Bây giờ ta chỉ ra rằng với mọi $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ cho trước và $z_1 = (x_1, u_1) \in K(\lambda_1)$, luôn tồn tại $z_2 = (x_2, u_2) \in K(\lambda_2)$ và $m > 0$ sao cho

$$\| z_1 - z_2 \| \leq m \| \lambda_1 - \lambda_2 \|_r.$$

Thật vậy, với mọi $(x_1, u_1) \in K(\lambda_1)$ ta có

$$\dot{x}_1(t) = A(t)x_1(t) + B(t)u_1(t) + T(t)\lambda_1(t), t \in [0,1] \text{ h.k.n.} \quad (4)$$

Chọn $u_2 = u_1$, tồn tại $x_2 \in X$ sao cho

$$\dot{x}_2(t) = A(t)x_2(t) + B(t)u_1(t) + T(t)\lambda_2(t), t \in [0,1] \text{ h.k.n.} \quad (5)$$

Từ (4) và (5) ta được

$$\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t) = A(t)(x_1(t) - x_2(t)) + T(t)(\lambda_1(t) - \lambda_2(t)), t \in [0,1] \text{ h.k.n.}$$

Theo giả thiết i), tồn tại các hằng số T_1, T_2 sao cho

$$|\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)| \leq T_1|x_1(t) - x_2(t)| + T_2|\lambda_1(t) - \lambda_2(t)|, t \in [0,1] \text{ h.k.n.} \quad (6)$$

Từ $x(t) = \int_0^t \dot{x}(s)ds$, ta được

$$\begin{aligned} |x_1(t) - x_2(t)| &\leq \int_0^t (T_1|x_1(s) - x_2(s)| + T_2\, |\lambda_1(s) - \lambda_2(s)|)ds \\ &\leq \int_0^t T_1|x_1(s) - x_2(s)|ds + \int_0^1 T_2|\lambda_1(t) - \lambda_2(t)|dt \\ &\leq \int_0^t T_1|x_1(s) - x_2(s)|ds + T_2 \| \lambda_1 - \lambda_2 \|_1 \\ &\leq \int_0^t T_1|x_1(s) - x_2(s)|ds + T_2 \| \lambda_1 - \lambda_2 \|_r. \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Gronwall-Bellman, ta được

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq T_2 \| \lambda_1 - \lambda_2 \|_r \exp\left(\int_0^t T_1 ds\right) \leq T_2 \| \lambda_1 - \lambda_2 \|_r \exp(\mathrm{T}_1).$$

Kết hợp với (6), ta có

$$\begin{aligned} \| \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \|_1 &\leq T_1 \| x_1 - x_2 \|_1 + T_2 \| \lambda_1 - \lambda_2 \|_r \\ &\leq T_1(T_2 \| \lambda_1 - \lambda_2 \|_r \exp(T_1)) + T_2 \| \lambda_1 - \lambda_2 \|_r = m. \| \lambda_1 - \lambda_2 \|_r, \end{aligned}$$

trong đó $m := T_1T_2\exp(T_1) + T_2$.

Do đó, ta có

$$\begin{aligned} \| z_1 - z_2 \| &= \| (x_1, u_1) - (x_2, u_2) \| = \| x_1 - x_2 \|_{1,1} \\ &= |x_1(0) - x_2(0)| + \| \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \|_1 = \| \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \|_1 \leq m \| \lambda_1 - \lambda_2 \|_r. \end{aligned}$$

Bước 2. Với $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ thỏa mãn $0 < \bar{\varepsilon}_0 < \varepsilon_2$ và $(\lambda_1, \mu_1) \in N \times \Omega$, ta ước lượng

$$H\big(\tilde{S}(\varepsilon_1,\lambda_1,\mu_1),\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_1)\big).$$

Trước tiên ta chứng minh rằng với mọi $(\lambda,\mu)\in N\times\Omega$ thì

$$H(\tilde{S}(\varepsilon_1,\lambda,\mu),\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda,\mu))\le \frac{\rho}{\varepsilon_2}|\varepsilon_1-\varepsilon_2|,$$

trong đó $\rho := diamK(\lambda_0) +\ 2m.diamN$.

Dễ thấy $\tilde{S}(\varepsilon_1,\lambda,\mu)\subseteq\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda,\mu)$ nên

$$H^*(\tilde{S}(\varepsilon_1,\lambda,\mu),\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda,\mu))=0. \quad (7)$$

Với mọi $z_2\in\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda,\mu), z_0\in\tilde{S}(0,\lambda,\mu)$ và $y\in K(\lambda)$ ta có

$$g(z_2,\mu)\le\ g(y,\mu)+\varepsilon_2 \text{ và } g(z_0,\mu)\le g(y,\mu).$$

Do đó

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}g(z_2,\mu)+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2}g(z_0,\mu)\le g(y,\mu)+\varepsilon_1.$$

Theo ii), do hàm $z\mapsto g(z,\mu)$ lồi trên $K(\lambda)$ nên

$$g\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}z_2+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2}z_0,\mu\right)\le g(y,\mu)+\varepsilon_1,\forall y\in K(\lambda).$$

Suy ra $z_1 := \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}z_2+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2}z_0\in\ \tilde{S}(\varepsilon_1,\lambda,\mu)$.

Khi đó

$$\|z_2-z_1\|=\left\|z_2-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}z_2+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2}z_0\right\|=\ \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}\|z_2-z_0\|.$$

Theo bước 1, với mọi $\lambda\in N$, ta có

$$K(\lambda)\subseteq K(\lambda_0)+m.B(0,\|\lambda-\lambda_0\|).$$

Do đó $diamK(\lambda)\le diamK(\lambda_0)+\ 2m.diamN=\rho$.

Suy ra $\|z_2-z_1\|\le\frac{\rho}{\varepsilon_2}|\varepsilon_1-\varepsilon_2|$.

Như vậy $H^*(\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda,\mu),\tilde{S}(\varepsilon_1,\lambda,\mu))\le\frac{\rho}{\varepsilon_2}|\varepsilon_1-\varepsilon_2|$. (8)

Từ (7) và (8) suy ra

$$H(\tilde{S}(\varepsilon_1,\lambda,\mu),\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda,\mu))\le\frac{\rho}{\varepsilon_2}|\varepsilon_1-\varepsilon_2|. \quad (9)$$

Do $\varepsilon_2\in[\bar{\varepsilon}_0,+\infty)$ nên từ (9) ta có

$$\begin{aligned} H(\tilde{S}(\varepsilon_1,\lambda_1,\mu_1),\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_1)) &\le\frac{\rho}{\bar{\varepsilon}_0}|\varepsilon_1-\varepsilon_2| \\ &\le k_1|\varepsilon_1-\varepsilon_2|, \text{ với } k_1:=\frac{\rho}{\bar{\varepsilon}_0}. \end{aligned}$$

Bước 3. Với $\varepsilon_2\in[\bar{\varepsilon}_0,+\infty),\lambda_1\in N$ và $\mu_1,\mu_2\in\Omega$ sao cho $\mu_1\neq\mu_2$, ta ước lượng

$$H(\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_1),\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_2)).$$

Ta xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1. $\|\mu_1-\mu_2\|_\infty^\beta\le\frac{\varepsilon_2}{2h}$.

Đặt $r:=2h\|\mu_1-\mu_2\|_\infty^\beta$, khi đó $0<r\le\varepsilon_2$. Ta chứng minh

$$\tilde{S}(\varepsilon_2 - r, \lambda_1, \mu_1) \subseteq \tilde{S}(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_2).$$

Thật vậy, lấy tùy ý $\bar{z} \in \tilde{S}(\varepsilon_2 - r, \lambda_1, \mu_1)$, với mọi $y \in K(\lambda_1)$ ta có

$$g(\bar{z}, \mu_1) \le g(y, \mu_1) + \varepsilon_2 - r.$$

Suy ra $g(\bar{z}, \mu_2) + g(\bar{z}, \mu_1) - g(\bar{z}, \mu_2) \le g(y, \mu_2) + g(y, \mu_1) - g(y, \mu_2) + \varepsilon_2 - r$.

Từ tính $h.\beta$-Hölder liên tục của $\mu \mapsto g(z, \mu)$ trên Ω, ta được

$$|g(\bar{z}, \mu_1) - g(\bar{z}, \mu_2)| \le h.\|\mu_1 - \mu_2\|_\infty^\beta \text{ và } |g(y, \mu_1) - g(y, \mu_2)| \le h.\|\mu_1 - \mu_2\|_\infty^\beta.$$

Suy ra $g(\bar{z}, \mu_2) - \frac{r}{2} \le g(y, \mu_2) + \frac{r}{2} + \varepsilon_2 - r$.

Hay $g(\bar{z}, \mu_2) \le g(y, \mu_2) + \varepsilon_2$ với mọi $y \in K(\lambda_1)$.

Như vậy $\bar{z} \in \tilde{S}(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_2)$.

Áp dụng bước 2, ta có

$$\begin{aligned} H^*\left(\tilde{S}(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_1), \tilde{S}(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_2)\right) &\le H^*\left(\tilde{S}(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_1), \tilde{S}(\varepsilon_2 - r, \lambda_1, \mu_1)\right) \\ &\le H\left(\tilde{S}(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_1), \tilde{S}(\varepsilon_2 - r, \lambda_1, \mu_1)\right) \\ &\le \frac{\rho.r}{\varepsilon_2} \le \frac{2\rho h}{\bar{\varepsilon}_0}\|\mu_1 - \mu_2\|_\infty^\beta. \end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có

$$H^*\left(\tilde{S}(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_2), \tilde{S}(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_1)\right) \le \frac{2\rho h}{\bar{\varepsilon}_0}\|\mu_1 - \mu_2\|_\infty^\beta.$$

Vậy $H\left(\tilde{S}(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_1), \tilde{S}(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_2)\right) \le \frac{2\rho h}{\bar{\varepsilon}_0}\|\mu_1 - \mu_2\|_\infty^\beta$. (10)

Trường hợp 2. Nếu $\|\mu_1 - \mu_2\|_\infty^\beta > \frac{\varepsilon_2}{2h}$ thì tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $\frac{diam\Omega}{n_0} \le \left(\frac{\bar{\varepsilon}_0}{2h}\right)^{1/\beta}$.

Phân hoạch đều đoạn $[\mu_1, \mu_2]$ với $n_0 + 1$ điểm $v_1, \ldots, v_{n_0+1}$ sao cho

$$v_1 = \mu_1, \ldots, v_{n_0+1} = \mu_2, \|v_i - v_{i+1}\| = \frac{\|\mu_1 - \mu_2\|_\infty}{n_0}.$$

Khi đó, ta có

$$\|v_i - v_{i+1}\|_\infty = \frac{\|\mu_1 - \mu_2\|_\infty}{n_0} \le \frac{P}{n_0} \le \left(\frac{\bar{\varepsilon}_0}{2h}\right)^{1/\beta} \text{ với } P = diam\Omega.$$

Hay $\|v_i - v_{i+1}\|_\infty^\beta \le \frac{\bar{\varepsilon}_0}{2h} \le \frac{\varepsilon_2}{2h}$.

Áp dụng kết quả của trường hợp 1 ta có

$$\begin{aligned} H\left(\tilde{S}(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_1), \tilde{S}(\varepsilon_2, \lambda_1, \mu_2)\right) &\le \frac{2\rho h}{\bar{\varepsilon}_0}\sum_{i=1}^{n_0}\|v_i - v_{i+1}\|_\infty^\beta \\ &\le \frac{2\rho h n_0}{\bar{\varepsilon}_0}\frac{\varepsilon_2}{2h} \\ &\le \frac{2\rho h n_0}{\bar{\varepsilon}_0}\|\mu_1 - \mu_2\|_\infty^\beta. \qquad (11) \end{aligned}$$

Kết hợp (10) và (11) ta có

$$H\left(\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_1),\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_2)\right) \le k_2\|\mu_1-\mu_2\|_\infty^\beta, \text{ với } k_2 := \frac{2\rho h n_0}{\bar{\varepsilon}_0}.$$

Bước 4. Với $\varepsilon_2 \in [\bar{\varepsilon}_0, +\infty)$, $\mu_2 \in \Omega$ và $\lambda_1, \lambda_2 \in N'$, trong đó $N' \subset N$ là lân cận của λ_0 sao cho diam$N' \le \frac{1}{2}$, ta ước lượng $H(\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_2),\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_2,\mu_2))$ với $\lambda_1 \ne \lambda_2$.

Đặt $\eta := \varepsilon_2 - \bar{\varepsilon}_0$ và $\delta := 2lm^\alpha\|\lambda_1-\lambda_2\|_r^{\alpha_1}$, trong đó $\alpha_1 := min\{1,\alpha\}$. Ta cũng xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1. Nếu $\delta = 2lm^\alpha\|\lambda_1-\lambda_2\|_r^{\alpha_1} \le \eta$ thì $\varepsilon_2-\delta \ge \varepsilon_2-\eta := \bar{\varepsilon}_0$. Khi đó, với mọi $z_1 \in \tilde{S}(\varepsilon_2-\delta,\lambda_1,\mu_2)$ ta có

$$z_1 \in K(\lambda_1) \text{ và } g(y,\mu_2)-g(z_1,\mu_2)+\varepsilon_2-\delta \ge 0 \text{ với mọi } y \in K(\lambda_1).$$

Theo bước 1, tồn tại $z_2 \in K(\lambda_2)$ sao cho $\|z_1-z_2\| \le m\|\lambda_1-\lambda_2\|_r$.

Mặt khác, với mọi $y_2 \in K(\lambda_2)$, tồn tại $y_1 \in K(\lambda_1)$ sao cho $\|y_1-y_2\| \le m\|\lambda_1-\lambda_2\|_r$.

Từ $y_1 \in K(\lambda_1)$ ta có

$$g(y_2,\mu_2)-g(z_2,\mu_2)+g(y_1,\mu_2)-g(z_1,\mu_2)-(g(y_2,\mu_2)-g(z_2,\mu_2))+\varepsilon_2-\delta \ge 0.$$

Suy ra

$$g(y_2,\mu_2)-g(z_2,\mu_2)+g(y_1,\mu_2)-g(y_2,\mu_2)+g(z_2,\mu_2)-g(z_1,\mu_2)+\varepsilon_2-\delta \ge 0.$$

Theo (ii), do $z \mapsto g(z,\mu_2)$ là $l.\alpha$-Hölder liên tục nên

$$\begin{aligned}|g(y_1,\mu_2)-g(y_2,\mu_2)|+|g(z_2,\mu_2)-g(z_1,\mu_2)| &\le l\|y_1-y_2\|^\alpha + l\|z_1-z_2\|^\alpha \\ &\le lm^\alpha\|\lambda_1-\lambda_2\|_r^\alpha + lm^\alpha\|\lambda_1-\lambda_2\|_r^\alpha \\ &\le 2lm^\alpha\|\lambda_1-\lambda_2\|_r^\alpha = \delta.\end{aligned}$$

Do đó ta có $g(y_2,\mu_2)-g(z_2,\mu_2)+\varepsilon_2 \ge 0$ với mọi $y_2 \in K(\lambda_2)$.

Suy ra $z_2 \in \tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_2,\mu_2)$.

Bây giờ, với mọi $z_0 \in \tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_2)$ và với mọi $z_1 \in \tilde{S}(\varepsilon_2-\delta,\lambda_1,\mu_2)$ ta có

$$\begin{aligned}d\left(z_0,\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_2,\mu_2)\right) &\le \|z_2-z_0\| \le \|z_2-z_1\|+\|z_1-z_0\| \\ &\le m\|\lambda_1-\lambda_2\|_r + \|z_1-z_0\|.\end{aligned}$$

Vì z_1 bất kỳ nên ta có

$$d\left(z_0,\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_2,\mu_2)\right) \le m\|\lambda_1-\lambda_2\|_r + d\left(z_0,\tilde{S}(\varepsilon_2-\delta,\lambda_1,\mu_2)\right).$$

Suy ra

$$\begin{aligned}H^*\left(\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_2),\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_2,\mu_2)\right) &\le m\|\lambda_1-\lambda_2\|_r + H^*\left(\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_2),\tilde{S}(\varepsilon_2-\delta,\lambda_1,\mu_2)\right) \\ &\le m\|\lambda_1-\lambda_2\|_r + H\left(\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_2),\tilde{S}(\varepsilon_2-\delta,\lambda_1,\mu_2)\right).\end{aligned}$$

Áp dụng bước 2 ta được

$$\begin{aligned}H^*\left(\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_2),\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_2,\mu_2)\right) &\le m\|\lambda_1-\lambda_2\|_r + \frac{\rho}{\bar{\varepsilon}_0}\delta \\ &\le m\|\lambda_1-\lambda_2\|_r + \frac{\rho}{\bar{\varepsilon}_0}2lm^\alpha\|\lambda_1-\lambda_2\|_r^{\alpha_1} \\ &\le \left(m+\frac{\rho}{\bar{\varepsilon}_0}2lm^\alpha\right)\|\lambda_1-\lambda_2\|_r^{\alpha_1}.\end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có

$$H^*(\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_2,\mu_2),\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_2)) \leq \left(m+\frac{\rho}{\bar{\varepsilon}_0}2lm^{\alpha}\right)\|\lambda_1-\lambda_2\|_r^{\alpha_1}.$$

Vậy $H(\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_2),\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_2,\mu_2)) \leq \left(m+\frac{\rho}{\bar{\varepsilon}_0}2lm^{\alpha}\right)\|\lambda_1-\lambda_2\|_r^{\alpha_1}$. (12)

Trường hợp 2. Nếu $\delta = 2lm^{\alpha}\|\lambda_1-\lambda_2\|_r^{\alpha_1} > \eta$ thì tồn tại số tự nhiên n sao cho $\frac{\delta}{n} \leq \eta$.

Phân hoạch đều đoạn $[\lambda_1,\lambda_2]$ với $n+1$ điểm $\tau_1,\ldots,\tau_{n+1}$ sao cho

$$\tau_1=\lambda_1,\ldots,\tau_{n+1}=\lambda_2 \text{ và } \left\|\tau_j-\tau_{j+1}\right\|_r = \frac{\|\lambda_1-\lambda_2\|_r}{n}.$$

Khi đó ta có

$$\left\|\tau_j-\tau_{j+1}\right\|_r^{\alpha_1} = \frac{\|\lambda_1-\lambda_2\|_r^{\alpha_1}}{n^{\alpha_1}} \leq \frac{\|\lambda_1-\lambda_2\|_r^{\alpha_1}}{n} \leq \frac{\eta}{2lm^{\alpha}}.$$

Suy ra $2lm^{\alpha}\left\|\tau_j-\tau_{j+1}\right\|_r^{\alpha_1} \leq \eta$.

Áp dụng kết quả của trường hợp 1 của bước 4 ta có

$$\begin{aligned} H\big(\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_2),\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_2,\mu_2)\big) &\leq \sum_{j=1}^{n} H\big(\tilde{S}(\varepsilon_2,\tau_j,\mu_2),\tilde{S}(\varepsilon_2,\tau_{j+1},\mu_2)\big) \\ &\leq \left(m+\frac{\rho}{\bar{\varepsilon}_0}2lm^{\alpha}\right)\sum_{j=1}^{n}\left\|\tau_j-\tau_{j+1}\right\|_r^{\alpha_1} \\ &\leq n\left(m+\frac{\rho}{\bar{\varepsilon}_0}2lm^{\alpha}\right)\frac{\|\lambda_1-\lambda_2\|_r^{\alpha_1}}{n^{\alpha_1}} \\ &= n^{1-\alpha_1}\left(m+\frac{\rho}{\bar{\varepsilon}_0}2lm^{\alpha}\right)\|\lambda_1-\lambda_2\|_r^{\alpha_1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Kết hợp (12) và (13) ta có

$$H\big(\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_2),\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_2,\mu_2)\big) \leq n^{1-\alpha_1}\left(m+\frac{\rho}{\bar{\varepsilon}_0}2lm^{\alpha}\right)\|\lambda_1-\lambda_2\|_r^{\alpha_1} := k_3\|\lambda_1-\lambda_2\|_r^{\alpha_1},$$

trong đó $k_3 = n^{1-\alpha_1}\left(m+\frac{\rho}{\bar{\varepsilon}_0}2lm^{\alpha}\right)$.

Bước 5. Kết hợp kết quả của bước 2, bước 3, bước 4 ta được

$$\begin{aligned} H\left(\tilde{S}(\varepsilon_1,\lambda_1,\mu_1),\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_2,\mu_2)\right) &\leq H\left(\tilde{S}(\varepsilon_1,\lambda_1,\mu_1),\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_1)\right) \\ &\quad + H\left(\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_1),\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_2)\right) + H\big(\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_1,\mu_2),\tilde{S}(\varepsilon_2,\lambda_2,\mu_2)\big) \\ &\leq k_1|\varepsilon_1-\varepsilon_2| + k_2\|\mu_1-\mu_2\|_{\infty}^{\beta} + k_3\|\lambda_1-\lambda_2\|_r^{\alpha_1}. \end{aligned}$$

Vậy ánh xạ nghiệm $\tilde{S}$ liên tục Hölder trên $[\bar{\varepsilon}_0,+\infty)\times N\times\Omega$.

3. KẾT LUẬN

Bài báo đã nghiên cứu thành công tính ổn định của ánh xạ nghiệm xấp xỉ của bài toán điều khiển tối ưu phụ thuộc tham số với phương trình trạng thái tuyến tính. Bằng cách sử dụng các giả thiết liên quan đến tính bị chặn trên phương trình điều khiển, tính lồi cũng như tính liên tục Hölder của hàm mục tiêu, các điều kiện đủ cho tính liên tục Hölder của ánh xạ nghiệm xấp xỉ đã được thiết lập. Kết quả trong Mục 2 là hoàn toàn mới cho lớp bài toán được xét. Tuy nhiên, bài báo nghiên cứu cho lớp bài toán điều khiển tối ưu vô hướng với phương trình điều khiển tuyến tính, đây là lớp bài toán khá đặc biệt. Chủ đề nghiên cứu trong bài báo này có thể mở rộng cho lớp các bài toán tổng quát hơn, chẳng hạn cho lớp bài toán với phương trình điều khiển phi tuyến và hàm mục tiêu vector, đây cũng là một trong những công trình của chúng tôi trong thời gian sắp tới.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Alexander, J.Z. (2013). *Structure of approximate solutions of optimal control problems*. New York: Springer.

Alekseev, V.M., Tikhomirov, V.M., & Fomin, S.V. (1987). *Optimal control*. New York: Springer Science+Business Media.

Lâm Quốc Anh., Phan Quốc Khánh., & Trần Ngọc Tâm. (2012). On Hölder continuity of approximate solutions to parametric equilibrium problems. *Nonlinear Analysis, 75,* 2293-2303.

Lâm Quốc Anh., Phan Quốc Khánh., & Trần Ngọc Tâm (2015). On Hölder continuity of solution maps of parametric primal and dual Ky Fan inequalities. *TOP*, *23*, 151-167.

Lâm Quốc Anh, Nguyễn Phúc Đức, Võ Thành Tài & Trần Ngọc Tâm (2018). Tính liên tục Hölder của ánh xạ nghiệm bài toán điều khiển tối ưu phụ thuộc tham số. *Tạp chí khoa học trường Đại học Cần Thơ*, *54*, 53-58.

Dontchev, A., Hager, W.W., Malanowski, K. & Veliov, V.M. (2000). On quantitative stability in optimization and optimal control. *Set-Valued Analysis*, *8,* 31-50.

David G.H. (2003). *Optimal control theory for applications*. New York: Springer Science+Business Media.

Kien, B.T. (2008). Lower semicontinuity of the solution set to a parametric generalized variational inequality in reflexive Banach spaces. *Set-Valued Analysis*, *16*, 1089-1105.

Kien, B.T., Toan, N.T., Wong, M.M. & Yao, J.C. (2012). Lower semicontinuity of the solution set to a parametric optimal control problem. *SIAM Journal Control Optimization*, *50*, 2889-2906.

Malanowski, K. (2001). Sensitivity analysis for optimal control problems subject to higher order state constraints. *Annals of Operations Research*, *101*, 43-73.

Malanowski, K. (2007). Sufficient optimality conditions in stability analysis for state-constrained optimal control. *Applied Mathematics Optimization*, *55*, 255-271.

Malanowski, K. (2007). Stability and sensitivity analysis for linear-quadratic optimal control subject to state constraints. *Optimization*, *56*, 463-478.

Malanowski, K. (2007). Stability analysis for nonlinear optimal control problems subject to state constraints. *SIAM Journal Optimization*, *18*, 926-945.

Malanowski, K. (2008). Second-order conditions in stability analysis for state constrained optimal control. *Journal of Global Optimization*, *40*, 161-168.

Santos, I.L.D. & Silva, G.N. (2014). Filippov's selection theorem and the existence of solutions for optimal control problems in time scales. *Computational and Applied Mathematics*, *33*, 223-241.

Walczak, S., (2001). Well-Posed and Ill-Posed Optimal Control Problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *109*, 169-185.

Zhan, Z., Wei, W., Li, Y. & Xu, H. (2012). Existence for calculus of variations and optimal control problems on time scales. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, *8*, 3793-3808.